УДК 681.7.068 **Скубак О.М.**

ВАРІАЦІЙНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА РІВНЯННЯ РУХУ ОСЕРДЯ ОПТИЧНОГО КАБЕЛЮ МЕРЕЖ ДОСТУПУ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ ФАКТОРІВ

В роботі розглянуто оптичні кабелі для мереж доступу. Для даного типу кабелю з допомогою варіаційних співвідношень одержано рівняння руху осердя оптичного кабелю мереж доступу під дією зовнішніх навантажень.

Ключовы слова: оптичний кабель, мережа доступу, полоса пропускання.

Аналіз сучасних мереж доступу показує, що самою перспективною є концепція “волокно в квартиру” FTTH (fiber to the home), оскільки вона забезпечує найбільшу полосу пропускання, масове обслуговування абонентів на відстані до 20 км від вузла зв’язку, швидкість доступу для абонента до кількох гігабіт в секунду. На цей час має місце широке впровадження технологій FTTH в США та Японії. В Японії ведеться робота над втіленням державної програми впровадження даної технології. В даній концепції волокно від головного вузла направляється безпосередньо в квартиру абонента.

Перевагами мережі FTTH являються:

- висока полоса пропускання. Сучасні вимоги до полоси пропускання - це 20-50 біт/с в нисхідному (до абонента) потоці і більш ніж 10 Мбіт/с в висхідному. Слід зазначити, що полоса 50 Мбіт/с відповідає двом потокам HDTV. При широкому поширенні HDTV-мовлення в майбутньому слід розраховувати, що кожна сім’я буде споживати одночасно до двох потоків відео.
- конфіденційність. А якщо врахувати, що оптичний сигнал скремблюється таким, наприклад, протоколом, як GPON, то можливість прослуховування практично виключається.
- висока надійність. ВОК (на відміну від мідних кабелів) не піддаються корозії в місцях зварювання, а кросові порти не окислюються, не реагують на вологість (як в вуличних кросах для мідних кабелів) і характеризуються відсутністю перехресних завад (cross-talk).

Головною складовою частиною мережі FTTH являються оптичні кабелі (ОК) з осердям стрічкового типу. ОК даного типу складаються з пакету плоских пластикових стрічок, в яких розміщено певне число оптичних волокон.

Прикладом оптичного кабелю з осердям стрічкового типу може служити ОК фірми OFS, BELL, RIBBON США та Японії.

Осердя стрічкового типу можна розглядати як суцільний стержень з прямокутним поперечним перерізом та природною круткою.

В роботі [2] було отримано рівняння руху для осердя оптичного кабелю (ОК) мереж доступу на основі теорії гнучких закручених стержнів. Ці ж рівняння можна також отримати з допомогою загального принципу Остроградського-Гамільтона, який можна представити у вигляді співвідношення:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta K - \delta \Pi + \delta A \right) dt;$$

де δK - варіація кінетичної енергії системи; $\delta \Pi$ - елементарна робота внутрішніх сил (варіація потенціальної енергії механічної системи); δA - елементарна робота зовнішніх сил.

Розглянемо в деформованій конфігурації C_e^* нескінченно малий елемент гнучкого закрученого стержня довжини ds^*. Внутрішні напруження зводимо до статично еквівалентної системи зусиль та моментів, приведених до осі стержня. В деякий момент часу зафіксуємо систему, тобто припускаємо, що вона знаходиться в рівновазі. Для цього необхідно прикласти окрім зовнішніх зусиль ще й сили інерції. В цей фіксований момент часу надамо точкам можливі переміщення, які не суперечать геометричним в’язям, що накладаються на точки стержня. Вважаємо, що ці переміщення не суперечать заданим граничним умовам та не порушують суцільності середовища. При наданні можливих переміщень завжди вважаємо, що активні сили не змінюють своєї величини та напрям.

Обчислимо елементарну роботу прикладених до стержня сил на цих переміщеннях. Це будуть внутрішні, зовнішні та прикладені на границі сили. Для заданої сили $\vec{F}$ та можливих переміщень $\delta\vec{r}$ її точки, до якої вона прикладена, елементарна робота δA визначається формулою $\delta A = \vec{F}\cdot\delta\vec{r}.$ Елементу стержня будемо надавати лінійні та кутові можливі переміщення, які будемо характеризувати відповідно векторами δr^* та $\delta\vec{\phi}^*$. Обчислимо елементарну роботу усіх прикладених сил на цих переміщеннях - δA^*. Це будуть: δA_1 - робота на можливих переміщеннях сил та моментів, прикладених на кінцях виділеного елемента та переведених в розряд зовнішніх сил:

$$\delta A_1 = \frac{\partial}{\partial s*}\left(\vec{F}\cdot\delta r*\right) + \frac{\partial}{\partial s*}\left(\vec{M}\cdot\delta\vec{\phi}\right)ds*.$$

δA_2 - робота сили $\vec{F}$ на кутових переміщеннях $\delta\vec{\phi}$.

Дана робота з'являється за рахунок того, що відбувається обертання елемента, оскільки сила $\vec{F}$ (див. рис. 1 [2]) від точки А до точки В зазнає зміни в сторону збільшення. Радіуси вектори точок О, А і В будуть відповідно:

$$\vec{r}_O = r*;\ \vec{r}_A* = r* - \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{r}*}{\partial s*}ds*;\ \vec{r}_B* = r* + \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{r}*}{\partial s*}ds*.$$

При обчисленні δA_2 квадратами $(ds*)^2$ нехтуємо як величинами другого порядку малості порівнюючи з $ds*$. Тоді

$$\delta A_2 = \left(r* - \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{r}*}{\partial s*}ds*\right)\times\left(-\vec{F}\right)\cdot\delta\vec{\phi} + \left(r* + \frac{1}{2}\frac{\partial\vec{r}*}{\partial s*}ds*\right)\times\left(\vec{F} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial s*}ds*\right)\cdot\left(\delta\vec{\phi} + \frac{\partial}{\partial s*}\left(\delta\vec{\phi}\right)ds*\right).$$

Провівши очевидні математичні дії, з урахуванням попередніх припущень, даний вираз можна представити у вигляді:

$$\delta A_2 = \frac{\partial}{\partial s*}\left[\left(\vec{r}*\times\vec{F}\right)\delta\vec{\phi}\right]ds*;$$

$$\delta A_3 = -\rho* ds* F*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\delta\vec{r}* - \rho*\frac{\partial}{\partial t}\left(I\vec{\omega}\right)\delta\vec{\phi}ds*;$$

$$\delta A_4 = \vec{f}* ds*\delta\vec{r}* + \vec{m}* ds*\delta\vec{\phi},$$

δA_3 - елементарна робота сил інерції при поступальному та обертальному рухах:

δA_4 - робота зовнішніх сил.

Тоді повна елементарна робота вказаних сил буде: $\delta A* = \delta\vec{A}_1 + \delta\vec{A}_2 + \delta\vec{A}_3 + \delta\vec{A}_4.$

Враховуючи, що $\frac{\partial\vec{r}*}{\partial s*} = \vec{\xi}_1,$ одержимо:

$$\delta A* = \left(\frac{\partial\vec{F}}{\partial s*} + \vec{f}* - \rho* ds* F*\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\right)\delta\vec{r}* ds* +$$

$$+\left(\frac{\partial\vec{M}}{\partial s*} + \left(\vec{\xi}_1\times\vec{F}\right) + \vec{m}* - \rho*\frac{\partial}{\partial t}\left(I\vec{\omega}\right)\right)\delta\vec{\phi}ds* + \vec{F}\frac{\partial}{\partial s*}\left(\partial\vec{r}*\right)ds* +$$

$$+\vec{M}\frac{\partial}{\partial s*}\left(\partial\vec{\phi}*\right)ds* + \left(\vec{r}*\times\vec{F}\right)\delta\vec{\phi}ds* + \left(\vec{r}*\times\vec{F}\right)\frac{\partial}{\partial s*}\left(\delta\vec{\phi}\right)ds*.$$

Оскільки в момент надання системі можливих переміщень вона знаходилась в рівновазі, то перші два члени в виразі для $\delta A*$ дорівнюють нулю, а інші члени не що інше, як елементарна робота внутрішніх сил:

$$\delta\Pi = \vec{F}\frac{\partial}{\partial s*}\left(\partial\vec{r}*\right)ds*+\vec{M}\frac{\partial}{\partial s*}\left(\partial\vec{\phi}\right)ds*+\left(\vec{r}*\times\vec{F}\right)\delta\vec{\phi}ds*+\left(\vec{r}*\times\vec{F}\right)\frac{\partial}{\partial s*}\left(\delta\vec{\phi}\right)ds*.$$

Оскільки $\vec{r}* = \vec{r}+\vec{u}$, то

$$\vec{F}\frac{\partial}{\partial s*}\left(\partial\vec{r}*\right)ds* = \vec{F}\delta\left(\frac{\partial\vec{r}*}{\partial s*}\right)ds* = \vec{F}\delta\left(\frac{\partial}{\partial s*}\left(\vec{r}+\vec{u}\right)\right)ds*,$$

$$\frac{\partial}{\partial s*}\left(\vec{r}+\vec{u}\right) \approx \frac{\partial}{\partial s*}\left(\vec{r}+\vec{u}\right) = \vec{\tau}+\frac{\partial\vec{u}}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial}{\partial s*}\left(\vec{r}+\vec{u}\right) = [2\frac{\partial u_0}{\partial s}+\left(\frac{\partial u_0}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial v_0}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial w_0}{\partial s}\right)^2+2\left(q_1w_0-r_1v_0\right)\frac{\partial u_0}{\partial s}+$$

$$+2\left(r_1u_0-p_1w_0\right)\frac{\partial v_0}{\partial s}+2\left(p_1v_0-q_1u_0\right)\frac{\partial w_0}{\partial s}+\left(r_1^2+q_1^2\right)u_0+\left(r_1^2+p_1^2\right)v_0+$$

$$+\left(q_1^2+p_1^2\right)w_0-2r_1v_0+2q_1w_0-2r_1q_1v_0w_0-2p_1q_1u_0v_0-2p_1r_1u_0w_0+1]\vec{\xi}_1+$$

$$+[\left(1+\frac{\partial u_0}{\partial s}\right)a_2+\left(1+b_2\right)\frac{\partial v_0}{\partial s}-b_3\frac{\partial w_0}{\partial s}+\left(r_1+r_1b_2+q_1b_3\right)u_0-\left(r_1a_2+p_1b_3\right)v_0-$$

$$-\left(p_1+p_1b_2-q_2a_2\right)w_0]\vec{\xi}_2+[\left(1+\frac{\partial u_0}{\partial s}\right)a_3+b_3\frac{\partial v_0}{\partial s}+\left(1+b_2\right)\frac{\partial w_0}{\partial s}+$$

$$+\left(-q_1+r_1b_3-q_1b_2\right)u_0+\left(p_1+p_1b_2-r_1a_3\right)v_0+\left(q_1a_3-p_1b_3\right)w_0]\vec{\xi}_3.$$

Це було отримано прийнявши до уваги, що $\vec{u}\left(s\right) = u_0\vec{\tau}+v_0\vec{\upsilon}_1+w_0\vec{\beta}_1$, та таблиці 1 [2].

Остаточно одержимо:

$$\frac{\partial}{\partial s*}\left(\vec{r}+\vec{u}\right) = \left(2\varepsilon_1+1\right)\vec{\xi}_1+\gamma_{12}\vec{\xi}_2+\gamma_{13}\vec{\xi}_3;$$

$$\vec{F}\frac{\partial}{\partial s*}\left(\partial\vec{r}*\right)ds* = \vec{F}\delta\left[\left(2\varepsilon_1+1\right)\vec{\xi}_1+\gamma_{12}\vec{\xi}_2+\gamma_{13}\vec{\xi}_3\right]ds*.$$

Оскільки $\vec{F} = N_1*\vec{\xi}_1+Q_2*\vec{\xi}_2+Q_3*\vec{\xi}_3,$ то одержимо:

$$\vec{F}\frac{\partial}{\partial s*}\left(\partial\vec{r}*\right)ds* = \frac{EF(1-\upsilon)}{\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\varepsilon_1\delta\varepsilon_1+\frac{2EF\upsilon}{\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\varepsilon_2\delta\varepsilon_2++FG\gamma_{12}\delta\gamma_{12}+FG\gamma_{13}\delta\gamma_{13}.$$

Розглянемо другий член виразу для $\delta\Pi$:

$$\vec{M}\frac{\partial}{\partial s*}\left(\partial\vec{\phi}\right)ds* = \vec{M}\delta\left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial s*}\right)ds*;\ \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial s*} = \vec{\Omega}*;\ \vec{\Omega}* = \Omega_1*\vec{\xi}_1+\Omega_2*\vec{\xi}_2+\Omega_3*\vec{\xi}_3.$$

Оскільки $\Omega_1* = -\chi_{23}+p_1; \Omega_2* = \chi_2+q_1; \Omega_3* = -\chi_3+r_1,$

то з урахуванням попереднього

$$\delta\Pi = \delta[\frac{EF(1-\upsilon)}{2\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\varepsilon_1^2+\frac{1}{2}(FG\gamma_{12}^2+FG\gamma_{13}^2-GI_p\chi_{23}^2+EI_2\alpha\chi_2^2+$$

$$+EI_3\alpha\chi_3^2)]ds*+\frac{2EF\upsilon}{\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right)}\varepsilon_2\delta\varepsilon_2ds*.$$

Визначимо вирази для кінетичної енергії. Це буде енергія поступального та обертального рухів. Відповідно кінетична енергія поступального та обертального рухів стержня будуть:

$$dK_1 = \frac{1}{2}\rho*F*ds*\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\right)^2;\ dK_2 = \frac{1}{2}\rho*I*ds*\left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial t}\right)^2.$$

Розглянемо варіації кінетичної енергії K_1 та K_2. З урахуванням того, що $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} = \vec{\omega}$, одержимо:

$$\delta K_1 = \int_0^{l*} \rho * F * \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta \vec{u}\right) ds*; \;\; \delta K_2 = \frac{1}{2}\delta\left(\int_0^{l*} \rho * \vec{\omega} I * \vec{\omega} ds*\right).$$

Елементарна роботу зовнішніх сил

$$\delta A = \vec{f} * ds * \delta \vec{r} * + \vec{m} * ds * \delta \vec{\phi} *.$$

Початкові умови: $\delta \vec{u}\,|_{t=t_0} = \delta \vec{u}\,|_{t=t_1}$; $\delta \vec{\phi}\,|_{t=t_0} = \delta \vec{\phi}\,|_{t=t_1}$; $\delta \dot{\vec{u}}\,|_{t=t_0} = \delta \dot{\vec{u}}\,|_{t=t_1}$; $\partial \dot{\vec{\phi}}\,|_{t=t_0} = \partial \dot{\vec{\phi}}\,|_{t=t_1}$.

Слід зазначити, що $\delta \vec{r}* = \delta\left(\vec{r} + \vec{u}\right) = \delta \vec{u}$. В силу закону збереження мас $\rho * F * ds* \approx ds\rho F,\ ds* \approx ds$ і в подальшому використаємо цей факт в співвідношенні для принципу Остроградського-Гамільтона, яке для нашого закрученого стержня запишемо у вигляді:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(K - \Pi\right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A dt = 0,$$

де $\delta K = \delta K_1 + \delta K_2,\ \delta K_1 = \int_0^{l} \rho F \frac{\partial \vec{r}*}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta \vec{r}*\right) ds,$

$$\delta K_2 = \int_0^{l} \rho I \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta \vec{\phi}\right) ds,$$

$$\delta \Pi = \int_0^{l} \left[\vec{F} \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta \vec{r}*\right) + \vec{M} \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta \vec{\phi}\right) + \left(\vec{r}* \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial s}\right)\delta \vec{\phi} + \left(\vec{r}* \times \vec{F}\right) \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta \vec{\phi}\right) \right] ds,$$

$$\delta A = \int_0^{l} \left[\vec{f} * \delta \vec{r} * + \vec{m} * \delta \vec{\phi} \right] ds.$$

Тоді маємо:

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ \int_0^{l} [\rho F \frac{\partial \vec{r}*}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t}\left(\delta \vec{r}*\right) + \rho I \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} \delta\left(\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t}\right) - \vec{F} \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta \vec{r}*\right) - \vec{M} \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta \vec{\phi}\right) -$$

$$-\left(\vec{r}* \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial s}\right)\delta \vec{\phi} - \left(\vec{r}* \times \vec{F}\right) \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta \vec{\phi}\right) + \vec{f} * \delta \vec{r} * + \vec{m} * \delta \vec{\phi}] ds \} dt = 0.$$

Інтегруючи частинами, отримуємо з урахуванням того, що $\delta \vec{r}* = \delta \vec{u}$:

$$\int_0^{l} \{ \rho F \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} \delta \vec{u}\,|_{t_0}^{t_1} + \rho I \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} \delta \vec{\phi}\,|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} [-\rho F \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \delta \vec{u} - \vec{F} \frac{\partial}{\partial s}(\delta \vec{u}) - \vec{M} \frac{\partial}{\partial s}(\delta \vec{\phi}) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}((\vec{r}* \times \vec{F})\delta \vec{\phi} - (\frac{\partial \vec{r}*}{\partial s} \times \vec{F})\delta \vec{\phi} + \vec{f} * \delta \vec{u} + \vec{m} * \delta \vec{\phi}] dt \} ds.$$

В силу початкових умов

$$\rho F \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \delta \vec{u}\,|_{t_0}^{t_1} = 0,\ \ \rho I \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} \delta \vec{\phi}\,|_{t_0}^{t_1} = 0:$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \{ \int_0^{l} [(\vec{f} * - \rho F \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2})\delta \vec{u} + ((\vec{\xi}_1 \times \vec{F}) + \vec{m} * - \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(I \vec{\omega}\right))\delta \vec{\phi} -$$

$$-\vec{F} \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta \vec{u}\right) - \vec{M} \frac{\partial}{\partial s}\left(\delta \vec{\phi}\right) - \frac{\partial}{\partial s}((\vec{r}* \times \vec{F})\delta \vec{\phi})] ds \} dt = 0.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_1}\{-\vec{F}\delta\vec{u}\,|_0^l - \vec{M}\delta\vec{\phi}\,|_0^l - (\vec{r}\,*\times\vec{F})\delta\vec{\phi}\,|_0^l + \int_0^l [(\frac{\partial\vec{F}}{\partial s} + \vec{f}\,* - \rho F\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2})\delta\vec{u} +$$

$$+(\frac{\partial\vec{M}}{\partial s} + (\vec{\xi}_1\times\vec{F}) + \vec{m}\,* - \rho\frac{\partial}{\partial t}\left(I\vec{\omega}\right))\delta\vec{\phi}\,]ds\}dt.$$

Таким чином, ми отримали рівняння руху та граничні умови: $\vec{F}\delta\vec{u}\,|_0^l = 0; \quad \vec{M}\delta\vec{\phi}\,|_0^l = 0.$

Якщо сюди додати роботу від початкових зусиль $\vec{F}_0$ та моментів $\vec{M}_0$ прикладених до стержня, то початкові умови набудуть вигляду: $(\vec{F} - \vec{F}_0)\delta\vec{u}\,|_0^l = 0;\ (\vec{M} - \vec{M}_0)\delta\vec{\phi}\,|_0^l = 0.$

З допомогою варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона отримані рівняння руху та граничні умови, що дозволяє визначити переміщення осердя ОК мереж доступу як під дією власної ваги, так і під дією зовнішніх навантажень, оцінити в подальшому їх вплив на оптичні характеристики кабелю.

ЛІТЕРАТУРА

1. Скубак О.М. Деякі аспекти механічних характеристик кабелів зв'язку, які мають осердя з природною круткою / О.М Скубак // Вісник ДУІКТ. - 2011. - Т.9, №1. - С. 100-106.
2. Скубак О.М. Поведінка оптичного кабелю мереж доступу під дією зовнішніх факторів./ О.М Скубак // Сучасний захист інформації. - 2013. - №1. - С. 39-45.
3. Скубак А.Н. Вариационные соотношения теории гибких, закрученных стержней (Редколлегия журн. “Прикладная механика”), Киев, 1986, с. 32. Библиогр. 5 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 24.11.86, №7975-В86).
4. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. / А.А. Илюхин. - К.: Наукова думка, 1979. - 216 с.
5. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб. Для втузов. В 2-х ч. Ч. I. Статика. / В.А. Светлицкий. – М.: Высш. Шк.., 1987. – 320 с.
6. Светлицкий В.А. Механика стержней: Учеб. Для втузов. В 2-х ч. Ч. II. Динамика. / В.А. Светлицкий. – М.: Высш. Шк.., 1987. – 304 с.

Надійшла: 087.04.2013 р.

Рецензент: д.т.н., проф. Щербак Л.М.