

## УСТОЙЧИВОСТЬ ГОФРИРОВАННЫХ АРОК ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

Предложена методика расчета устойчивости и закритического поведения гофрированных арок, основанная на решении нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с использованием метода последовательных нагружений. Краевая задача в приращениях решается методом дискретной ортогонализации. Решение конкретных задач по устойчивости гофрированных арок показало, что поведение таких конструкций при нагружении существенно отличается от поведения круговых арок.

**Ключевые слова:** нелинейная система, устойчивость, деформация, метод дискретной ортогонализации.

**Введение.** Исследование устойчивости оболочек является одной из важнейших задач механики тонкостенных конструкций. В первых работах по устойчивости труб при внешнем давлении и устойчивости круговых колец и арок [1, 4] было замечено, что как по постановке, так и по методам решения эти задачи весьма близки между собой. Оказалось, что длинные панели ведут себя также как арки единичной ширины. Это дает возможность использовать результаты по устойчивости арок и длинных оболочек как дополняющие друг друга. В работах [4, 7] рассматривалась устойчивость при внешнем давлении цилиндрических оболочек, поперечное сечение которых имело волнообразный характер. В случае, когда профиль волн образован дугами окружностей возможно повышение критического значения интенсивности внешнего давления по сравнению с круговыми оболочками. Этот факт был обнаружен при расчете коротких оболочек. Что касается длинных оболочек или гофрированных арок, то до настоящего времени, судя по известным нам источникам, их устойчивость не изучалась. В работе [4, 7] рассмотрено деформирование арок, состоящих из сегментов прямых стержней. Решению задачи устойчивости и закритического поведения волнообразных арок посвящена настоящая работа.

**Постановка задачи.** Для задания геометрических параметров арки воспользуемся полярной системой координат  $R, \varphi$ . Кривую, являющуюся осевой линией арки, можно задать в виде

$$R = R_0 \rho(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_N, \quad (1)$$

где  $R_0$  - радиус исходной окружности, которой придается волнистость в виде, описываемом периодической функцией  $\rho(\varphi)$ , заданной на всем интервале  $(0, \varphi_N)$  одним выражением или только на подинтервале  $\varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i$ , повторяющемся  $N$  раз. При этом периодичность можно обеспечить с помощью рядов Фурье, как это сделано в работах [4, 7], или же путем соответствующего алгоритма при численном решении [7].

Полагаем, что на отрезке  $[0, \varphi_1]$  функция  $\rho(\varphi)$  состоит из двух дуг  $\frac{r\gamma_0}{2}$  выпуклой окружности, сопряженных дугой  $r_1\beta_0$  вогнутой окружности (рис. 1).

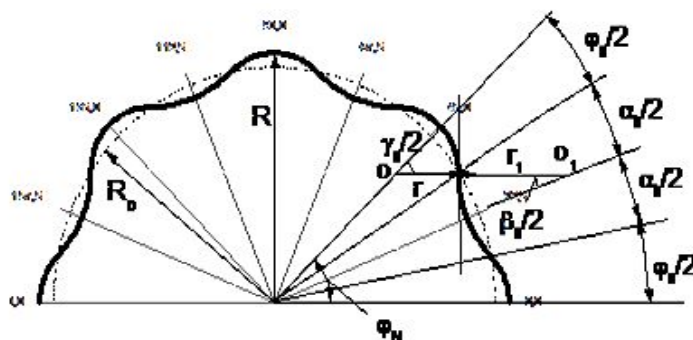


Рис. 1. Вид функции  $\rho(\varphi)$  на отрезке  $[0, \varphi_1]$

Сопряжение выполняется так, что производная  $\rho'(\varphi)$  является непрерывной функцией. Вследствие этого радиусы малых окружностей  $r$  и  $r_1$  в точке сопряжения лежат на одной прямой.

На участке  $\left(0, \frac{\varphi_0}{2}\right)$  функция

$$\rho(\varphi) = \omega_1 \cos \varphi + E_2(\varphi); \quad (2)$$

где  $\omega_1 = \cos \frac{\varphi_0}{2} - p \cos \frac{\gamma_0}{2}$ ,  $E_2(\varphi) = \sqrt{p^2 - \omega^2 \sin^2 \varphi}$ ,  $p = \frac{r}{R_0}$ .

Уравнение вогнутой дуги при  $\varphi \in \left(\frac{\varphi_0}{2}, \frac{\varphi_0}{2} + \alpha_0\right)$  задается в виде

$$\rho(\varphi) = \omega_2 \cos \varphi_1 - E_2(\varphi_1); \quad (3)$$

где  $\omega_2 = \cos \frac{\alpha_0}{2} + p \cos \frac{\beta_0}{2}$ ,  $\varphi_1 = \varphi - \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\alpha_0}{2}$ ,  $p_1 = \frac{r_1}{R_0}$ .

На участке  $\varphi \in \left(\frac{\varphi_0}{2} + \alpha_0, \varphi_0 + \alpha_0\right)$  уравнение кривой  $\rho(\varphi)$  совпадает с уравнением (2), но вместо  $\varphi$  надо писать  $\varphi_2 = \varphi - \varphi_0 - \alpha_0$ . При заданных углах  $\varphi_0, \gamma_0$  радиус окружности  $r$  вычисляется согласно формуле

$$r = R_0 \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\gamma_0}{2}}. \quad (4)$$

Аналогично, при известных  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  имеем

$$r_1 = R_0 \frac{\sin \frac{\alpha_0}{2}}{\sin \frac{\beta_0}{2}}. \quad (5)$$

Между углами  $\varphi_0, \gamma_0, \alpha_0, \beta_0$  существует зависимость (рис. 1)

$$\gamma_0 = \varphi_0 + \alpha_0 + \beta_0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что при задании угла  $\gamma_0$  надо учитывать, что

$$\varphi_0 + \alpha_0 < \gamma_0 < \pi. \quad (7)$$

Параметр Ляме  $A_2$  и радиус кривизны  $R_2$  кривой (1) найдем, воспользовавшись формулами

$$R_2 = R_0 \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}; \quad A_2 = R_0 (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

или

$$R_2 = R_0 \rho_2, \quad A_2 = R_0 a_2.$$

Для первого и третьего участков получим

$$\rho_2 = p, \quad a_2 = p_1 \frac{\rho(\varphi)}{E_2(\varphi)}, \quad (9)$$

для второго

$$\rho_2 = -p_1, \quad a_2 = p_1 \frac{\rho(\varphi_1)}{E_2(\varphi)}. \quad (10)$$

Так как функции  $\rho$  и  $\rho'$  непрерывны, то параметр  $A_2$  также непрерывная функция. Радиус кривизны в точках сопряжения меняет знак и величину, если  $r \neq r_1$ .

Пусть гофрированная арка, имеющая единичную ширину и толщину  $t$ , нагружена равномерным внешним давлением интенсивностью  $q$ . Для исследования нелинейного деформирования и устойчивости арки воспользуемся вариантом уравнений теории оболочек, предложенном в работе [6]. Так как рассматривается плоская деформация арки, то в [6] учитываются только перемещения  $v$  и  $w$ , деформации растяжения  $\varepsilon_{22}$  и изменения кривизны  $\kappa_{22}$ , усилия  $T_{22}, T_{23}$  и момент  $M_{22}$ . Деформации выражаются через перемещения

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\theta_2^2; \quad \kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad (11)$$

где  $\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w}{R_2}$ ,  $\theta_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{R_2}$ ,  $\psi = -\theta_2$ .

Соотношения закона Гука имеют вид

$$T_{22} = C_{22}^* \varepsilon_{22} + B_{22}^* \kappa_{22}; \quad M_{22} = B_{22}^* \varepsilon_{22} + D_{22} \kappa_{22}, \quad (12)$$

где для обобщенных жесткостей принятые в [8] обозначения имеют в данном варианте такой смысл:

$$C_{22}^* = C_{22} + \frac{1}{R_2^2} D_{22}; \quad B_{22}^* = \frac{1}{R_2} D_{22}; \quad C_{22} = \frac{Et}{1-\nu^2}; \quad D_{22} = \frac{t^2}{12} C_{22} \dots \quad (13)$$

Соотношения (12) можно записать также в виде

$$T_{22} = C_{22} \varepsilon_{22} + \frac{1}{R_2} D_{22} \left( \kappa_{22} + \frac{1}{R_2} \varepsilon_{22} \right); \quad M_{22} = D_{22} \left( \kappa_{22} + \frac{1}{R_2} \varepsilon_{22} \right). \quad (14)$$

Для длинных цилиндрических оболочек запись приращения кривизны в виде суммы  $\kappa_{22} + \frac{1}{R_2} \varepsilon_{22}$  играет, как известно, существенную роль. Поэтому уточненные выражения (12)

могут применяться к оболочкам любой длины и, следовательно, к расчету арок.

Дифференциальные уравнения равновесия запишем в проекциях на направления осей недеформированного криволинейного стержня

$$\frac{1}{A_2} \frac{dT_{22}}{d\varphi} - \frac{1}{R_2} T_{23}^* = 0; \quad \frac{1}{A_2} \frac{dT_{23}^*}{d\varphi} + \frac{1}{R_2} T_{22} + q = 0; \quad \frac{1}{A_2} \frac{dM_{22}}{d\varphi} - T_{23} = 0, \quad (15)$$

где  $T_{23}^* = T_{23} + T_{22} \theta_2$ .

Представленные зависимости позволяют получить разрешающую систему нелинейных уравнений в таком виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_2} \frac{dv}{d\varphi} &= \frac{1}{R_2} w - \frac{1}{2} \theta_2^2 + \frac{1}{C_{22}} T_{22} - \frac{1}{R_2 C_{22}} M_{22}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{dw}{d\varphi} &= -\frac{v}{R_2} - \psi; \\ \frac{1}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} &= -\frac{1}{R_2 C_{22}} T_{22} + \frac{1}{D_{22}} \left( 1 + \frac{t_2}{12 R_2^2} \right) M_{22}; \\ \frac{1}{A_2} \frac{dT_{22}}{d\varphi} &= \frac{1}{R_2} T_{23}^*; \\ \frac{1}{A_2} \frac{dT_{23}^*}{d\varphi} &= -\frac{1}{R_2} T_{22} - q; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{dM_{22}}{d\varphi} = T_{23}. \quad (16)$$

К этим уравнениям следует присоединить граничные условия, которые формулируются относительно трех величин, взятых по одной из таких пар

$$(v, T_{22}), (w, T_{23}^*), (\psi, M_{22}), \quad (17)$$

при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_N$ .

Решение системы уравнений (16) при соответствующих граничных условиях позволяет исследовать докритическое состояние арки, определить критические точки и дать приближенное представление о характере закритического поведения, так как уравнения (16) для больших прогибов не применимы.

**Решение задачи.** Приведем систему уравнений (16) к безразмерному виду, используя при этом такие обозначения разрешающих функций

$$y_1 = \frac{T_{22}R_0^2}{C_{22}t^2}, \quad y_2 = \frac{T_{23}^*R_0^2}{C_{22}t^2}, \quad y_3 = \frac{M_{22}R_0^2}{C_{22}t^3}, \quad y_4 = \frac{vR_0}{t^2}, \quad y_5 = \frac{w}{t}, \quad y_6 = \frac{R}{t}\psi.$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} \frac{dy_1}{d\varphi} &= \frac{1}{\rho_2} y_2; & \frac{1}{a_2} \frac{dy_2}{d\varphi} &= -\frac{1}{\rho_2} y_1 - m_q; & \frac{1}{a_2} \frac{dy_3}{d\varphi} &= \frac{1}{h} y_2 + y_1 y_6; \\ \frac{1}{a_2} \frac{dy_4}{d\varphi} &= \frac{1}{h\rho_2} y_5 - \frac{1}{2} y_6^2 + y_1 - \frac{h}{\rho_2} y; \\ \frac{1}{a_2} \frac{dy_5}{d\varphi} &= -\frac{1}{\rho_2} y_4 - y_6; \\ \frac{1}{a_2} \frac{dy_6}{d\varphi} &= -\frac{1}{\rho_2} y_1 + (12 + h^2) y_3, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $h = \frac{t}{R_0}$ ,  $m_q = \frac{qR_0^3}{C_{22}t^2}$ .

Граничные условия также формулируются относительно функций  $y_i$ . Их удобно записать в матричном виде. При  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_N$  будем соответственно иметь

$$A_1 Y = 0 \text{ и } A_2 Y = 0, \quad (19)$$

матрицы  $A_1$  и  $A_2$  имеют размеры  $3 \times 6$  с компонентами  $a_{ij}$  равными единице, на тех местах, которые умножаются на компоненты вектора  $Y(y_1, \dots, y_6)$ ,  $y_j$  или  $y_{j+3}$  последовательно ( $j = 1, 2, 3$ ) при  $i = 1, 2, 3$ .

Для решения задач (18), (19) на всей траектории деформирования воспользуемся методом непрерывного продолжения по параметру [3]. Продифференцируем уравнения (18) по параметру  $\lambda$ , который представляет собой длину дуги множества решений нелинейной системы. Так как в системе (18) четыре уравнения линейные, то при дифференцировании они сохраняют свой вид, но вместо функций  $y_i$  надо подставить производные

$\dot{y}_i = \frac{dy_i}{d\lambda}$ ,  $\dot{m}_q = \frac{dm_q}{d\lambda}$ . Два уравнения (3-е и 4-е) приобретут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} \frac{d\dot{y}_3}{d\varphi} &= \frac{1}{h} \dot{y}_2 + \dot{y}_1 y_6 + y_1 \dot{y}_6; \\ \frac{1}{a_2} \frac{d\dot{y}_4}{d\varphi} &= \frac{1}{h\rho_2} \dot{y}_5 - \dot{y}_6 y_6 + \dot{y}_1 - \frac{h}{\rho_2} \dot{y}_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Граничные условия (19) также записываются относительно производных

$$A_1 \dot{Y} = 0 \text{ и } A_2 \dot{Y} = 0 \quad (21)$$

при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \varphi_N$ .

Полученная система уравнений, кроме производных  $\dot{y}_i$ , содержит производную от нагрузки  $\dot{m}_q$ , которая также подлежит определению. Дополнительное уравнение, позволяющее решить задачу

$$\sum_{i=1}^6 (\dot{y}_i)^2 + (\dot{m}_q)^2 = 1, \quad (22)$$

обеспечивает движение по кривой нагружения [3]. Оно соответствует требованию, чтобы полученное решение обладало единичной нормой.

Если найдено решение задачи (20)-(22), то для определения функций  $y_i$  и нагрузки  $m_q$  формулируется задача Коши по параметру  $\lambda$ . Методика и алгоритм решения задачи в такой постановке изложены в [3].

Одним из методов решения задачи Коши является метод Эйлера. При использовании этого метода можно несколько видоизменить алгоритм решения, перейдя непосредственно к методу последовательных нагружений, модифицированному таким образом, чтобы он был применим не только в регулярных, но и в особых точках траектории нагружения [10]. Домножим уравнения (20), (21) на  $d\lambda$  и заменим дифференциалы функций конечными приращениями. Приращение нагрузки представим как

$$\Delta m_1 = \dot{m}_q \Delta \lambda. \quad (23)$$

Уравнение (22) заменяется приближенным

$$\sum_{i=1}^6 \left( \frac{\dot{y}_i}{\Delta \lambda} \right)^2 + (\dot{m}_q)^2 = 1. \quad (24)$$

Разрешающая система уравнений в приращениях имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\varphi} &= \frac{a_2}{\rho_2} z_2; \\ \frac{dz_2}{d\varphi} &= -\frac{a_2}{\rho_2} z_1 - a_2 z_7 \Delta \lambda; \\ \frac{dz_3}{d\varphi} &= \frac{a_2}{h} z_2 + a_2 y_6 z_1 + a_2 y_1 z_6; \\ \frac{dz_4}{d\varphi} &= \frac{a_2}{h \rho_2} z_5 - a_2 y_6 z_6 + a_2 z_1 - h \frac{a_2}{\rho_2} z_3; \\ \frac{dz_5}{d\varphi} &= -h \frac{a_2}{\rho_2} z_4 - a_2 z_6; \\ \frac{dz_{61}}{d\varphi} &= -h \frac{a_2}{\rho_2} z_7 + a_2 (12 + h^2) z_3, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $z_i = \Delta y_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ ,  $z_7 = \dot{m}_q$ .

Граничные условия запишутся как

$$A_i z_i = 0; \quad A_2 z_i = 0. \quad (26)$$

Задавая приращения параметра  $\lambda$ , находим значения функций  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, 7$ . При начальном значении параметра  $\lambda$  решается линейная система (18), поэтому коэффициенты  $y_1$ ,  $y_6$  в системе (25) на следующем шаге нагружения известны.

Решение системы (25) находится методом дискретной ортогонализации Годунова [2 ], хорошо зарекомендовавшем себя при решении задач теории оболочек [4 ]. Весь интервал  $0 \leq \varphi \leq \varphi_N$  делится на  $k$  участков. На  $j$ -м участке полное решение записывается в виде

$$z^{(j)} = \bar{z}^{(j)} C^{(j)}, \quad (26)$$

где  $\bar{z}^{(j)}$  - матрица, состоящая из четырех векторов-решений системы (26). Решение удовлетворяет граничным условиям при  $\varphi = 0$  независимо от значения констант  $C^{(j)}$ . Для определения этих констант используются граничные условия при  $\varphi = \varphi_N$ . Подставив (26) в уравнения  $A_2 z_i = 0$ , получим

$$A_2 \bar{z}^{(k)} C^{(k)} = 0. \quad (27)$$

Эта система состоит из трех уравнений относительно четырех неизвестных. Дополнительное уравнение вытекает из условия нормирования (24). В данной задаче этому условию соответствует требование, чтобы вектор  $C^{(k)}$  был единичным:

$$\sum_{i=1}^4 C_i^2 = 1. \quad (28)$$

Так как система (27) имеет небольшой порядок, то ее решение при условии (28) можно представить в явном виде

$$C_i^{(k)} = \frac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta}}, \quad i = 1, 2, 3; \quad C_4^{(k)} = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta}}, \quad (29)$$

где  $\Delta$ - определитель матрицы коэффициентов при неизвестных  $C_1^{(k)}, C_2^{(k)}, C_3^{(k)}, \dots, \Delta_i$  - определители, которые образуются из основного определителя  $\Delta$  путем замены  $i$ - столбца столбцом коэффициентов при неизвестном  $C_4^{(k)}$  с обратным знаком. Если ранг расширенной матрицы равен трем, то решение в виде (29) существует независимо от того, равен определитель  $\Delta$  нулю или нет. При критической нагрузке  $\Delta = 0$ , поэтому

$$C_i^{(k)} = \frac{\Delta_i}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \Delta}}; \quad C_4^{(k)} = 0. \quad (30)$$

Является ли эта точка на траектории нагружения предельной или точкой бифуркации можно судить по моде выпучивания. Если эта мода ортогональна к исходной форме деформирования, то будем иметь точку бифуркации. При вырождении расширенной матрицы системы (27) необходимо использовать другую процедуру продолжения решения [3].

Изложенная методика решения нелинейной краевой задачи использовалась при расчете нелинейного деформирования торосферических оболочек [10]. Полученные результаты хорошо совпадают с результатами, полученными другими авторами более сложным путем [5].

**Результаты расчета и их обсуждение.** Для проверки достоверности разработанной методики рассмотрим расчет нелинейного деформирования с прохождением особых точек круговых изотропных длинных цилиндрических панелей (арок) при внешнем давлении. Эта задача рассматривалась многими авторами [3] и в настоящее время ее можно использовать как тестовую.

При действии на арку внешнего давления интенсивностью  $q$ , в работах [6] получена формула для критического значения этого давления:

$$q_{kp} = \frac{D_{22}^2}{R_0^3} \left( \frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right), \quad (31)$$

где  $D_{22}$  - принятое выше обозначение окружной изгибной жесткости,  $\varphi_N$  - центральный угол арки.

Безразмерное значение  $m_{q,kp} = \frac{q_{kp} R_0^3}{C_{22} t^2}$  при подстановке значения (31) будет:

$$m_{q,kp} = \frac{D_{22}^2}{C_{22} t^2} \left( \frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right). \quad (32)$$

Формула (32) справедлива при шарнирно-опертых концах арки. При жестком закреплении концов в [6] получено приближенное решение, которое также можно использовать для оценки достоверности результатов, получаемых с помощью предложенной методики. Так как для однослойной арки  $D_{22} = \frac{1}{12} C_{22} t^2$ , то

$$m_{q,kp} = \frac{1}{12} \left( \frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right). \quad (33)$$

Эта величина не зависит ни от механических, ни от геометрических параметров арки, кроме угла  $\varphi_N$ . Однако при расчете закритического состояния арки имеет также значение отношение  $t/R_0$ , поэтому нельзя ограничиваться только заданием угла  $\varphi_N$ . Ниже будем полагать в большинстве рассматриваемых примеров отношение  $t/R_0 = 0,01$ .

В таблице 1 приведены данные о критических нагрузках для арок с различными углами  $\varphi_N$  при шарнирном (ш.з.) и жестком (ж.з.) закреплении концов, полученные по представленной выше методике и по формулам Тимошенко [6]. Критические нагрузки в каждом случае отнесены к  $q_{kp}$ , определяемому по формуле (33) при  $\varphi_N = \pi$ .

Критические нагрузки для арок с различными углами  $\varphi_N$  при шарнирном (ш.з.) и жестком (ж.з.) закреплении концов Таблица 1

$\varphi_N$		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$2\pi$
ш.з.	Работа [6]	11,67	2,67	1,00	0,42	0,15	0
	Настоящая работа	11,95	2,90	1,09	0,328	0,042	0
ж.з.	Работа [6]	24,44	6,04	2,67	1,53	1,09	1
	Настоящая работа	24,81	6,25	3,0	1,54	0,661	0,24

Сравнение показывает, что при  $\varphi_N \leq \frac{4\pi}{3}$  результаты расчета по обеим методикам хорошо согласуются как при шарнирном, так и при жестком закреплении. Если же  $\varphi_N = 2\pi$ , то расчет по [6] дает завышенное значение критической нагрузки при жестком закреплении. Форма потери устойчивости, которая предполагается в решении [6], весьма далека от той, что дает решение по предлагаемой методике.

На рис. 2 приведена диаграмма деформирования (а) и форма потери устойчивости (б) круговой арки при  $\varphi_N = \pi$  с шарнирным опиранием концов.

Такие же арки рассматривались в работе [3]. Критические нагрузки, полученные в [3] и по методике, изложенной выше, совпадают. Формы потери устойчивости при  $\varphi_N = \pi$  также совпадают, но различаются при  $\varphi = \pi/4$  и  $\varphi = \pi/2$ . В работе [3] они не симметричны относительно середины дуги, а в настоящей работе - симметричны. Диаграммы деформирования, полученные авторами [3] и по предлагаемой методике, хорошо согласуются при  $\varphi_N = \pi$  и не совпадают при  $\varphi_N = \pi/2$  и  $\varphi_N = \pi/4$ . Объясняется это тем, что в работе [3] для перехода на закритическую траекторию задавалось возмущение нагрузки, вид которого предопределял направление этой траектории. В данном варианте

расчета такая процедура не используется. При этом перемещение точки  $\varphi = \frac{\varphi_N}{2}$  в окрестности критической точки может изменять направление вследствие перестройки докритической формы деформирования в ортогональную ей закритическую. На диаграммах деформирования по оси абсцисс отложены значения отношения прогиба к толщине ( $w' = w/t$ ), по оси ординат - ( $q'$ )- отношение критического давления, определяемого в настоящей работе, к значению  $q_{kp}$  вычисляемому по формуле (33). Аналогичные оси используются при построении диаграммы деформирования гофрированных арок на рис. 3 - 6. Круговой арке с углом раствора  $\varphi_N = \pi$  придана волнистость описанного выше типа с количеством волн  $N$  по периметру равным 2, 4, 8, 16.

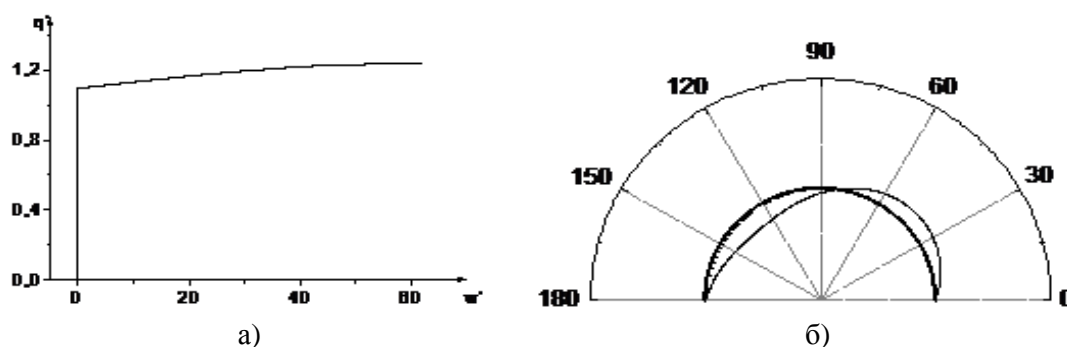


Рис. 2. Диаграмма деформирования (а) и форма потери устойчивости (б) круговой арки при  $\varphi_N = \pi$  с шарнирным опиранием концов

На рис. 3, а представлены диаграммы деформирования с двумя волнами по периметру ( $N = 2$ ).

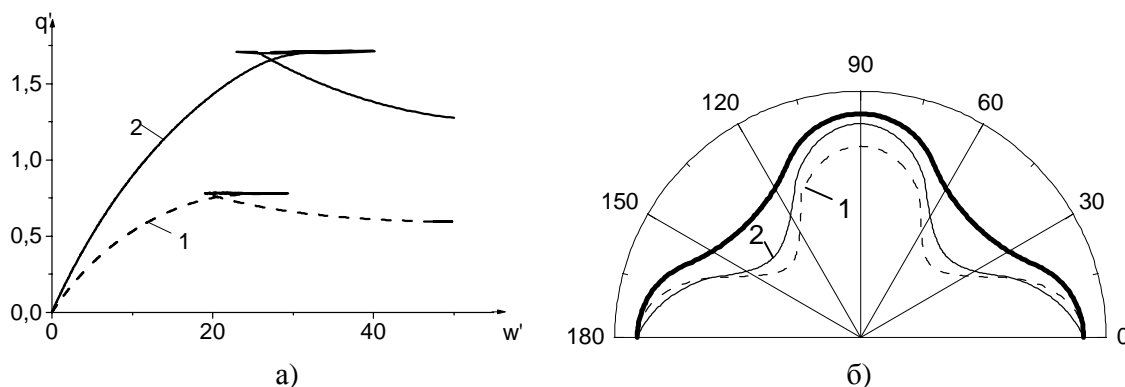


Рис. 3. Диаграмма деформирования с двумя волнами по периметру ( $N = 2$ ) (а), и формы деформирования арок в закритическом состоянии (б)

Кривая (1) получена для арки с шарнирным опиранием концов, кривая (2) - с жестким при  $\varphi = 60^\circ$ . На этих кривых имеются предельные точки (20; 0,78) на кривой (1) и (25; 1,71) - на кривой (2). При прогибах, больших 20 толщин равновесие арки будет возможным при нагрузке, меньшей предельного значения. Как следует из вида кривых (1) и (2) на рис. 3 б, где представлены формы деформирования арок в закритическом состоянии при тех же граничных условиях, определяющую роль в распределении прогибов играет исходная геометрия арки. Судя по значению предельных нагрузок и величин прогибов, арки, имеющие форму, показанную на рис. 3, б толстой кривой, имеют существенно меньшую жесткость, чем круговые. Увеличение количества волн по периметру исходной арки приводит к



изменению ее жесткостных параметров в целом и в пределах каждой волны. Результаты расчета деформирования арок с  $N = 4, 8, 16$  представлены на рис. 4, а; б, в, а соответствующие исходные арки и их вид в закритическом состоянии на тех же рисунках, но обозначенных буквой «б».

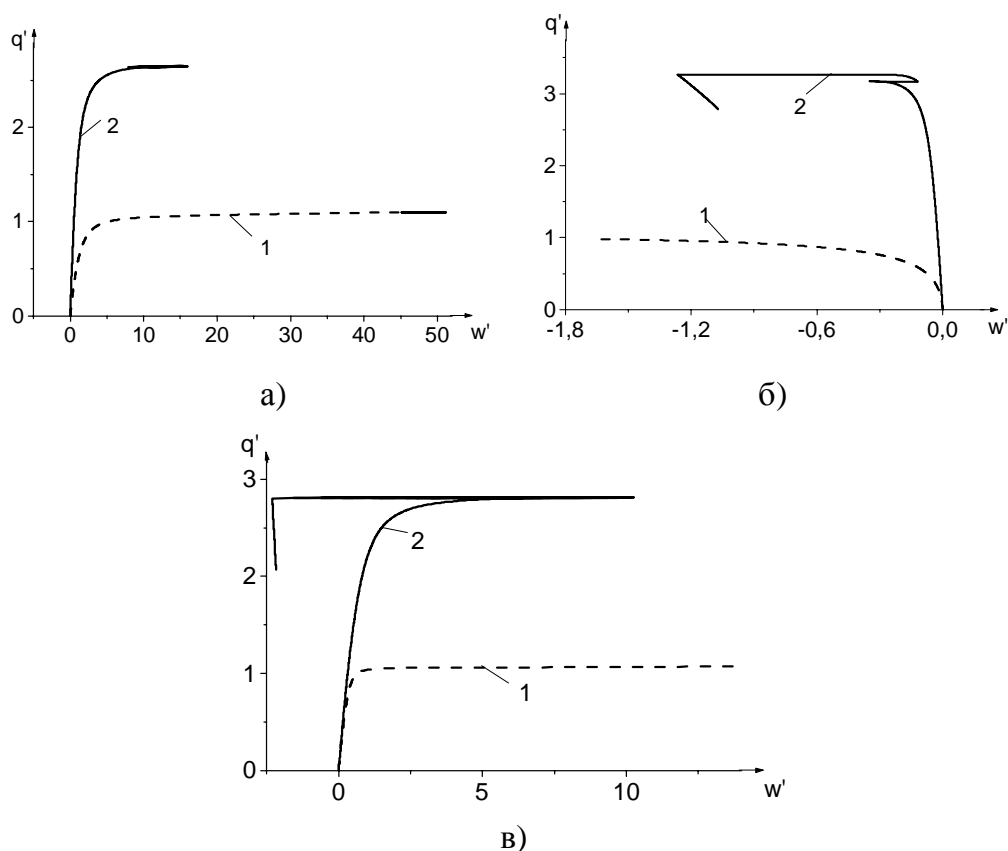


Рис. 4. Результаты расчета деформирования арок с  $N = 4, 8, 16$

Нумерация кривых цифрами 1 и 2 имеет тот же смысл, что и на рис. 3. Нагрузки, после достижения которых начинается бурное развитие прогибов, равны 1,09 ( $N = 4$ ), 1,12 ( $N = 8$ ), 1,20 ( $N = 16$ ) при шарнирном опирании концов и 2,65 ( $N = 4$ ), 2,81 ( $N = 8$ ), 3,17 ( $N = 16$ ) при жестком защемлении. Как видно, при  $N \geq 4$  критические нагрузки гофрированных арок близки к тем, что имеют круговые арки. Формы потери устойчивости также не симметричны относительно середины арки, но их вид существенно различается в зависимости от количества волн и граничных условий. Выпучивание сопровождается локальным деформированием дуг малых окружностей. Шарнирно опертые арки испытывают в закритическом состоянии значительно больший поворот относительно центральной оси, чем жестко опертые.

Отметим, что для гофрированных арок в предложенной методике среди исходных данных должны быть известны углы  $\varphi_0, \alpha_0, \gamma_0$ . В рассмотренных примерах

$$\alpha_0 = \varphi_0 = \frac{\varphi_N}{2N}, \quad \gamma_0 = \alpha_0 + \varphi_0 + \frac{\pi}{4}.$$

#### Выводы.

1. Предложена методика расчета устойчивости и закритического поведения гофрированных арок, основанная на решении нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка с использованием метода последовательных нагружений при решении алгебраических уравнений. При этом обеспечивается прохождение особых точек на траектории деформирования. Краевая задача в приращениях решается методом дискретной

ортогонализации. Методики расчета обладают возможностями, позволяющими проводить многочисленные исследования.

2. Решение конкретных задач по устойчивости гофрированных арок показало, что формирование профиля арок с помощью выпуклых и вогнутых дуг окружностей позволяет создавать конструкции, поведение которых при нагружении существенно отличается от поведения круговых арок. В то же время критические нагрузки гофрированных арок могут быть как значительно меньшими, так и близкими к критическим нагрузкам идеальных круговых арок.

3. Так как устойчивость арок единичной ширины определяется с помощью таких же уравнений, что и длинных цилиндрических оболочек, то полученные в работе данные показывают, что, в отличие от коротких оболочек [4], длинные продольно гофрированные оболочки не обладают большей жесткостью, чем круговые цилиндрические оболочки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Динник А.Н. Устойчивость арок / А.Н. Динник. – М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1946. - 128 с.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи мат. наук - 1961. - Т. XVI, Вып. 3. - С. 171-174.
3. Григолюк Э.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела / Э.И. Григолюк, В.И. Шалашилиню - М.: Наука, 1988. - 232 с.
4. Семенюк Н.П. Устойчивость волнообразных некруговых цилиндрических оболочек из композитов при внешнем давлении / Н.П. Семенюк, Н.Б. Жукова, В.В. Остапчук // Прикл. механика. - 2007. - 43, № 12. - С. 91 - 102.
5. Семенюк Н.П. Об исследовании нелинейного поведения тонких оболочек шаговым методом / Н.П. Семенюк, В.М. Трач, Н.Б. Жукова // Прикл. механика. - 2007. - 44, № 9. - С. 85-93.
6. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко. - М.: Гостехиздат, 1955. – 567 с.
7. Семенюк Н.П. Устойчивость гофрированных по окружности оболочек при гидростатическом давлении / Н.П. Семенюк, В.М. Трач, Н.Б. Жукова. - 2010. - №9.
8. Борисейко А.В. О канонических уравнениях геометрически нелинейной теории тонких анизотропных оболочек / А.В. Борисенко, Н.П. Семенюк, В.М. Трач. - 2010. - №2
9. Wang C.J. Buckling and Postbuckling of segmented tubes under external pressure // Int. J. of Non-Linear Mechanics – 2005. – P.551-556.

Надійшла: 12.12.2012

Рецензент: д.т.н., проф. Єрохін В.Ф.